Enrico Martino e Gabriele Usberti

Sulla nozione atemporale di verità nell'intuizionismo

Abstract - The truth of a (mathematical) proposition A can be intuitionistically analyzed either as the *possibility* that A is known or as the *existence* of a proof of A; in Section 1 we put into evidence some consequences of the adoption, within the framework of intuitionistic mathematics, of an *atemporal* notion of truth, i.e. of an atemporal notion of possibility or of existence. We ask whether *potential* intuitionism (i.e. intuitionism plus timeless possibility or existence) is compatible with the antirealism of orthodox intuitionism. Our answer is negative. Once timeless possibility is admitted, the principle of *Potential Excluded Middle* (PEM) - "A is (potentially) true [i.e., can be proved] or A is not (potentially) true" - becomes *intelligible*, and valid, in its *classical* reading, according to which every proposition A is *determinate*: A situation in which A were atemporally indeterminate would be *ipso facto* a situation in which A is unprovable. At this point - as we show - also the explanation of the meaning of the logical constants in terms of (classical) truth conditions becomes *intelligible* to the potential intuitionist, and he can no longer object to the realist that his explanation cannot be understood.

In Section 2 we examine the question whether potential intuitionism can be proposed as a paradigm of logical validity that is better, in any sense, than the classical one. Two facts incline us to give a negative answer. First, the potential intuitionist has a very good reason to give his explanation of the 'potential meaning' of the logical constants in a *classical* metatheory (which, as we saw, he has no reason to refuse): by using such a metatheory he can give a really *reductive* explantion of the potential meaning, which moreover coincides, according to him, with the orthodox intuitionistic meaning. Second, it turns out that the potential meaning of the logical constants is *definable* in terms of the *classical* logical constants and of an epistemic operator K (to be read "It is (timelessly) knowable (or provable) that").

In the light of these considerations the potential intuitionist is to be seen rather as a realist especially interested at the notion of knowability (realistically) conceived as knowability of objective facts.

0. Introduzione

Secondo la concezione oggi più diffusa della verità costruttiva la verità andrebbe concepita come una nozione atemporale. Prawitz (1987) scrive:

> "Un enunciato matematico è vero se esiste una dimostrazione di esso, in un senso atemporale o astratto di esiste [...]. Oppure possiamo esprimere la stessa idea dicendo che un enunciato A è vero se 'possiamo dimostrare A' [...]. Che possiamo dimostrare A va inteso non nel senso che dimostrare A rientra nelle nostre capacità pratiche, ma soltanto nel senso che è in linea di principio possibile dimostrare A [...]. Analogamente, che esiste una dimostrazione di A non significa che sarà costruita una dimostrazione di A, ma solo che sussiste la possibilità di costruire una dimostrazione di A. [...] Io non vedo alcuna obiezione al concepire la possibilità che esista un metodo specifico per curare il cancro che un giorno possiamo scoprire, ma che può anche rimanere ignoto per sempre."(pp. 153-154.)

Martin-Lof (1991) distingue tra verità attuale e potenziale di una proposizione. Queste nozioni sarebbero spiegate intuizionisticamente dalle nozioni di *esistenza attuale* e *potenziale* di una dimostrazione. Una dimostrazione di una proposizione A esiste attualmente se, di fatto, A è stata dimostrata; esiste potenzialmente se A *può* essere dimostrata. La possibilità non è qui intesa nel senso intuizionista tradizionale di conoscenza di un metodo per dimostrare A, ma come possibilità "indipendente dalla conoscenza e atemporale". Quindi una proposizione che è stata dimostrata diventa attualmente vera, ma era potenzialmente vera anche prima di essere stata dimostrata, e sarebbe vera anche se, di fatto, non fosse mai stata dimostrata. In questo modo, secondo Martin-Lof, l'intuizionista può superare la ben nota obiezione secondo la quale dire che una proposizione *diventa* vera nel momento in cui viene dimostrata è controintuitivo e in conflitto con l'uso standard del predicato di verità: la verità potenziale non è esposta a tale obiezione.

La posizione di Dummett su questo punto sembra piuttosto oscillante. Da un lato egli ha argomentato a favore della nozione di verità - di una *qualche* nozione di verità - entro il framework concettuale costruttivista e, in questo contesto, a favore di una "necessaria concessione al realismo", ed è stato probabilmente il primo a suggerire di concepire la verità intuizionista come atemporale.

D'altra parte ha manifestato, soprattutto in anni recenti, alcune perplessità sulla compatibilità di una nozione atemporale di verità con l'antirealismo degli intuizionisti.

1. Atemporalità e verità classica.

Come abbiamo visto, Martin-Lof (1991) sostiene che la verità potenziale è indipenente dalla conoscenza nel senso che una proposizione può essere potenzialmente vera anche se nessuno sa (né saprà) che lo è. Ciononostante egli considera questa nozione intuizionisticamente significativa per due ragioni. In primo luogo essa è *concettualmente* dipendente dalla nozione di conoscenza. Infatti "dire che A è potenzialmente vera è dire che A può essere attualmente vera" e dire che A è attualmente vera è dire che A è *conosciuta* come vera. Quindi la verità potenziale dipende dalla conoscenza nel senso che è definibile in termini di conoscenza (conformemente all'idea aristotelica che *actus est prior potentia*). In secondo luogo, la verità potenziale soddisfa ovviamente il requisito costruttivista che ogni proposizione vera possa essere dimostrata.

Tuttavia, la definizione di verità potenziale fa un riferimento essenziale non solo alla nozione di conoscenza (o di dimostrazione), ma anche alla nozione di *possibilità*. Quindi la semplice priorità concettuale della nozione di conoscenza rispetto a quella di verità potenziale non garantisce la definibilità di quest'ultima in termini intuizionisti, e neppure la sua accettabilità da un punto di vista intuizionista: è necessario che anche la nozione di possibilità coinvolta sia intuizionisticamente accettabile. Analogamente, la tesi che ogni proposizione potenzialmente vera *può* essere dimostrata sarà una tesi intuizionista solo se la modalità coinvolta è intuizionista.

Ora, il concetto di possibilità, inteso nel modo descritto sopra, è indubbiamente estraneo all'intuizionismo di Brouwer and Heyting. In base a quest'ultimo, la possibilità di una costruzione va concepita sempre come uno *stato epistemico*, cioè come uno stato in cui il soggetto conoscente riconosce di essere in grado di effettuare quella determinata costruzione. La possibilità di cui parlano Prawitz e Martin-Lof, al contrario, *non* è caratterizzata come uno stato epistemico, ma come accessibilità *puramente fattuale* a uno stato epistemico.

Un brano di Dummett (1977) è forse responsabile di una certa confusione a questo proposito. Dummett scrive:

> "Per un costruttivista sarebbe possibile condividere con il platonista l'opinione che un'asserzione matematica, se è vera, è vera atemporalmente: quando un'asserzione viene dimostrata, con ciò si mostra che è sempre stata vera. Dire questo equivale, in realtà, ad equiparare 'A è vera' con 'Possiamo dimostrare A', piuttosto che con 'A è stata dimostrata', e 'A è falsa' con 'Non possiamo dimostrare A'. Una tale interpretazione di 'vero' e 'falso' rimane fedele ai principi fondamentali dell'intuizionismo solo se 'Possiamo dimostrare A' ('A è dimostrabile') non viene interpretata né, a un estremo, nel senso che, indipendentemente dalla nostra conoscenza, esiste qualcosa che, se ne divenissimo consapevoli, riconosceremmo come una dimostrazione di A, né, all'estremo opposto, nel senso che di fatto abbiamo dimostrato A o la dimostreremo prima o poi. Nel primo caso dovremmo fare appello a un regno oggettivo di dimostrazioni concepito platonisticamente; nel secondo saremmo autorizzati a negare che A fosse dimostrabile su basi non-matematiche (per esempio se fosse imminente la scomparsa del genere umano). 'Possiamo dimostrare A' deve essere intesa come resa vera soltanto dal nostro effettivo dimostrarla, ma come resa falsa soltanto dal nostro trovare un ostacolo puramente matematico a una sua dimostrazione." (p. 19)

Ma se "A è vera" è identificato con "Possiamo dimostrare A" e "Possiamo dimostrare A" è *resa* vera soltanto dal nostro *effettivo* dimostrarla, allora A *non era* vera prima di essere stata dimostrata, e la nozione di verità non è atemporale. Perciò, se vogliamo che sia atemporale, è necessario che anche la nozione di possibilità, nei termini della quale è definita, sia concepita come atemporale. Quindi, nella misura in cui identifichiamo la verità con la dimostrabilità e concordiamo con l'intuizionismo tradizionale nell'idea che la dimostrabilità di A sussiste solo in virtù del nostro effettivo dimostrare A, non possiamo essere d'accordo con l'opinione del platonista che un'asserzione matematica, se è vera, è vera atemporalmente.

Prawitz e Martin-Lof vogliono conciliare l'intuizionismo con la credenza che le verità matematiche sono eterne. Essendo consapevoli della difficoltà appena illustrata, essi si dichiarano convinti che la dimostrabilità di una proposizione possa essere concepita come atemporale anche da un punto di vista intuizionista.

Riferendosi al brano di Dummett citato sopra, Prawitz (1987) afferma di non avere difficoltà ad intendere "l'esistenza di una dimostrazione in riferimento a un regno oggettivo di dimostrazioni", in quanto "in tale regno oggettivo di dimostrazioni non può essere in questione l'esistenza di una dimostrazione che non sia in linea di principio riconoscibile da parte nostra." (p. 154).

Osserviamo incidentalmente che l'esistenza attuale eterna delle dimostrazioni non è affatto in conflitto con la loro potenzialità: quest'ultima non concerne l'esistenza ma la capacità di essere afferrate da parte della mente umana (idealizzata); in breve, le dimostrazioni sono attualmente esistenti ma solo potenzialmente conosciute.

Da parte sua, Martin-Lof (1991) rifiuta qualunque identificazione della dimostrabilità con la conoscenza di una dimostrazione:

> "Se qualcosa è stato, è o sarà fatto allora può essere fatto, ma la conversa non vale. Nel caso del dimostrare una proposizione ciò significa che, se una proposizione è stata, è o sarà dimostrata, allora sicuramente può essere dimostrata, cioè è potenzialmente vera, ma non c'è assolutamente alcuna ragione per credere che possiamo andare nella direzione opposta. Il principio che abbiamo appena spiegato è di nuovo un principio che ha ricevuto una succinta formulazione scolastica: si tratta del principio Ab esse ad posse valet consequentia (illatio)." (p. 143)

In altre parole, dal fatto di possedere una dimostrazione di A possiamo ovviamente inferire la dimostrabilità di A, ma non conversamente, come invece accadrebbe se la dimostrabilità di A sussistesse soltanto in virtù della nostra conoscenza di una dimostrazione di A.

Martin-Lof non si vincola alla posizione di Prawitz, che si potrebbe chiamare "platonismo delle dimostrazioni". Tuttavia, una volta adottata una nozione atemporale di dimostrabilità, è inevitabile accettare un regno oggettivo di *proposizioni*. Infatti, se la possibilità di dimostrare una proposizione A è concepita come atemporale, A stessa diventa un'entità atemporale; se una proposizione esistesse solo in quanto creata dalla mente del soggetto creativo (come ritiene l'intuizionista ortodosso), avrebbe un'esistenza esclusivamente temporale, per cui, supposto che fosse dimostrabile, la sua dimostrabilità sarebbe anch'essa temporale, poiché non potrebbe sussistere prima della creazione della proposizione stessa. Quindi la verità potenziale presuppone perlomeno l'esistenza di un regno oggettivo di proposizioni, e di conseguenza conduce inevitabilmente a una sorta di realismo, che si accetti o meno un regno oggettivo di *dimostrazioni*.

Indipendentemente dai problemi che stiamo discutendo, un'ontologia di dimostrazioni può essere problematica per alcuni aspetti (specialmente per ragioni di impredicatività). Siamo inclini a ritenere che la concezione intuizionista della verità come dimostrabilità (temporale o atemporale) non vincoli necessariamente a tale ontologia, in quanto l'attività matematica del dimostrare non sembra richiedere alcuna reificazione delle dimostrazioni. Di conseguenza, nelle pagine che seguono non assumeremo che l'adozione di una nozione atemporale di dimostrabilità comporti un'ontologia di prove-come-oggetti.

Chiamiamo "intuizionismo potenziale" la concezione descritta sopra, fautrice di una nozione atemporale di possibilità, e "intuizionismo ortodosso" la concezione brouweriana originaria della matematica. Si pone la domanda seguente: l'intuizionismo potenziale è ancora in grado di respingere la logica classica a favore di quella intuizionista?

La possibilità atemporale è sicuramente incompatibile con la teoria brouweriana delle sequenze a libera scelta. L'atemporalità della dimostrabilità presuppone che gli oggetti di discorso siano ben determinati. Per esempio, se a è una sequenza anomica la possibilità (o impossibilità) di dimostrare a(n)=m è determinata quando viene compiuta l'n-esima scelta. Una volta che questa proposizione è stata dimostrata, possiamo certamente dire che aveva la possibilità di essere dimostrata anche prima della scelta del suo n-esimo valore, nel senso che nulla avrebbe potuto impedire che l'n-esima scelta fosse appunto m. Ma questo non è il tipo di possibilità che ci interessa qui: è una possibilità temporale che si sarebbe perduta se come a(n) fosse stato scelto un numero diverso da m, per cui in nessun senso potremmo asserire che a(n)=m era (potenzialmente) vera prima di esser stata dimostrata. Perciò l'intuizionista potenziale deve rifiutare le sequenze a scelta e limitarsi a un'ontologia nomica.

Ad ogni modo, le sequenze a scelta non giocano un ruolo centrale nella critica intuizionista della *logica* classica. Il rifiuto brouweriano del terzo escluso non si fonda su alcuna supposta indeterminatezza degli oggetti matematici, ma semplicemente sulla sua particolare concezione del nesso tra verità e conoscenza (sebbene egli abbia sfruttato le sequenze a scelta per dare controesempi forti a teoremi classici). Quindi il nostro problema può essere riformulato nei termini seguenti: l'intuizionista potenziale è ancora in grado di difendere l'atteggiamento negativo di Brouwer nei confronti della logica classica? La risposta, a nostro avviso, è necessariamente negativa. La ragione si trova formulata, *in nuce*, in un brano di Dummett (1987):

> "C'è una ben nota difficoltà connessa al concepire le dimostrazioni matematiche [...] come esistenti indipendentemente dal nostro avere a che fare con esse - una difficoltà che non si risolve insistendo sul fatto che si tratta di dimostrazioni che siamo capaci di afferrare o di costruire. é difficile vedere come si possa resistere ad identificare la falsità di un'asserzione (la verità della sua negazione) con la non-esistenza di una dimostrazione o verificazione: ma allora è altrettanto difficile vedere come, in base a questa concezione dell'esistenza delle dimostrazioni, si possa resistere alla supposizione che una dimostrazione di una data asserzione o esiste o non esiste. Ci saremo cos“ cacciati in una posizione realista, con una giustificazione della bivalenza. Se ci rifiutiamo di identificare la falsità con la non-esistenza di una dimostrazione non saremo in una posizione molto migliore, perché troveremo difficile resistere alla conclusione che ci sono asserzioni determinatamente né vere né false, in quanto non ci sono dimostrazioni né di esse né delle loro negazioni: avremo quindi un rifiuto quasi-realista della bivalenza." (p. 285)

Elaboriamo l'osservazione di Dummett. Dal fatto che la possibilità venga concepita come atemporale segue che il seguente principio del *Terzo Escluso Potenziale*:

(TEP)A è potenzialmente vera o A non è potenzialmente vera

diventa *intellegibile*, e valido, nella sua interpretazione *classica*. Infatti, in questa interpretazione esso significa semplicemente che tutte le proposizioni, quali vengono concepite dall'intuizionista potenziale, sono atemporalmente *determinate*, e ciò è chiaramente vero: se l'esser A dimostrabile o meno fosse indeterminato, la dimostrabilità di A sarebbe esclusa per sempre in quanto, in base alla concezione in discussione, una proposizione non può *diventare* dimostrabile. Perciò tale stato di ipotetica indeterminatezza di A non potrebbe essere altro che uno stato di ben determinata indimostrabilità di A. Che A sia dimostrabile o meno è un fatto che riguarda il mondo immutabile delle proposizioni, nel quale non c'è spazio per alcuna indeterminatezza.

Naturalmente l'intuizionista potenziale potrebbe rifiutarsi di interpretare classicamente le costanti logiche che occorrono in (TEP); potrebbe interpretarle intuizionisticamente e di conseguenza rifiutare (TEP). Ma questa mossa non influirebbe sul fatto che, dal suo punto di vista, l'interpretazione classica di (TEP) è intellegibile. Mentre l'intuizionista ortodosso può rifiutare l'interpretazione classica di (TEP) a causa del suo rifiuto di di certe categorie presupposte da quell'interpretazione (per esempio un regno oggettivo di proposizioni), l'intuizionista potenziale deve riconoscere che quelle categorie sono le stesse che egli stesso deve ammettere. Se egli insistesse nel dire che l'interpretazione classica di (TEP) è priva di senso, rinuncerebbe semplicemente alla possibilità di *esprimere* la propria convinzione che la dimostrabilità è atemporalmente determinata, senza aver guadagnato un argomento contro il realista[1].

L'intuizionista potenziale è quindi costretto ad ammettere che l'interpretazione realista delle costanti logiche è dotata di senso ed appropriata ad esprimere certi fatti concernenti la verità potenziale.

Naturalmente, la verità potenziale di un enunciato, interpretato in base al significato intuizionista delle costanti logiche, non coincide affatto, in generale, con la sua verità classica. Tuttavia, l'intuizionista potenziale è in grado di *ricostruire* la nozione classica di verità all'interno del suo schema concettuale, almeno nel caso di un linguaggio in cui il significato classico e intuizionista degli enunciati *atomici* è lo stesso, in particolare quando gli enunciati atomici sono decidibili. In questo caso, la definizione induttiva della verità classica data da Tarski è perfettamente intellegibile all'intuizionista potenziale, poiché le clausole tarskiane sono basate sulla nozione di verità potenziale per le formule atomiche, e il significato classico delle costanti logiche metalinguistiche (coinvolte nelle clausole tarskiane) è appropriato all'oggettività realista della verità potenziale. Illustriamo questo punto in una caso particolare.

Sia P(x) un predicato decidibile sui numeri naturali. Dato un numero n, P(n) è classicamente (e intuizionisticamente) vera sse è dimostrabile in base alla procedura di decisione. Quindi la verità classica di $\forall x P(x)$ è definita in termini della verità potenziale di tutti i P(n) e del quantificatore metalinguistico classico "tutti". Poiché, per ogni n, è oggettivamente determinato se P(n) è dimostrabile o no, è anche oggettivamente determinato se tutti i P(n) sono dimostrabili oppure qualcuno non lo è. Quindi il significato classico del quantificatore metalinguistico è accessibile all'intuizionista potenziale ed egli può comprendere perfettamente la spiegazione tarskiana di "$\forall x P(x)$ è vera".

Al contrario, tale spiegazione non è disponibile per l'intuizionista ortodosso. Per lui ogni P(n) è dimostrabile o no semplicemente nel senso che, dato un qualunque n, in virtù della procedura di decisione egli sa come verificare o come falsificare P(n). Ma dal suo punto di vista la verificabilità o la falsificabilità non sono proprietà intrinseche dei P(n), sussistenti indipendentemente dalla sua conoscenza. Di conseguenza la dimostrabilità di tutti i P(n) non è un fatto oggettivo che sussiste o meno nel regno delle proposizioni; è un fatto che inizia ad esistere solo se e quando il soggetto conoscente riconosce, attraverso un ragionamento astratto, che la procedura di decisione, applicata a un n arbitrario, verificherà P(n). Questo punto di vista è essenziale per il rifiuto intuizionista del principio del Terzo Escluso; quest'ultimo afferma, in base a tale concezione, che conosciamo un metodo per decidere qualunque proposizione, e può quindi essere criticato in quanto asserisce la nostra onniscienza. Ma l'intuizionista potenziale non può rifiutare l'interpretazione classica del Terzo Escluso, in base alla quale $\forall x P(x) \vee$ non-$\forall x P(x)$ esprime l'ovvia verità *fattuale* che o tutti i P(n) sono atemporalmente dimostrabili oppure alcuni non lo sono - una verità che non ha niente a che fare con la capacità umana di decidere quale alternativa vale.

Di conseguenza, l'intuizionista potenziale, a differenza di quello ortodosso, è costretto ad ammettere l'intellegibilità della logica classica. Tuttavia, egli può ancora difendere la logica intuizionista sostenendo che essa, diversamente da quella classica, soddisfa certi requisiti desiderabili, in particolare il fondamentale requisito costruttivista che ogni verità sia dimostrabile in linea di principio, mentre la verità classica, per quanto definibile nel framework dell'intuizionismo potenziale, è irrimediabilmente separata dalla dimostrabilità. Nella sezione seguente prendiamo in esame questa linea argomentativa.

2. L'intuizionismo potenziale come sottosistema della matematica epistemica

Consideriamo una proposizione logicamente complessa, per esempio $\forall x A$, e supponiamo di voler spiegare il suo significato in termini di qualche nozione-chiave come quella di verità, o di dimostrazione. Il formato standard della spiegazione è il seguente. Se abbiamo scelto la verità come nozione-chiave, assumiamo di sapere che cosa sono le condizioni di verità di A e definiamo le condizioni di verità di $\forall x A$; a questo scopo dobbiamo usare la costante logica metalinguistica "tutti" (o qualche nozione matematica in termini della quale essa possa essere definita), il cui significato assumiamo pertanto come noto. Analogamente, se abbiamo scelto la dimostrazione come nozione-chiave, assumiamo di sapere che cosa è una dimostrazione di A e definiamo che cosa è una dimostrazione di $\forall x A$; a questo scopo dobbiamo usare la costante logica metalinguistica "tutti" (o qualche nozione matematica in termini della quale essa possa essere definita), il cui significato assumiamo pertanto come noto. In ogni caso dobbiamo assumere sostanzialmente di conoscere, a livello metalinguistico, il significato delle stesse costanti che stiamo spiegando; sembra che siamo caduti in un regresso infinito. Diremo che ciò compromette l'efficacia della nostra spiegazione? é un problema interessante e di portata molto generale che qui non prenderemo in esame; lo menzioniamo soltanto perché una differenza importante tra l'intuizionista potenziale e l'intuizionista ortodosso concerne la risposta che essi possono dare a tale domanda.

In base alla concezione ingenua - realista - le dimostrazioni sono argomentazioni per ottenere evidenza che si danno certi stati di cose, o che sussistono determinati fatti oggettivi. Da questo punto di vista è del tutto naturale caratterizzare le dimostrazioni in termini dei fatti che esse dimostrano; per esempio, una dimostrazione di $\forall xA$ può essere definita come una dimostrazione del fatto che tutti i fatti espressi da $A(d_1/x)$, $A(d_2/x)$,... sussistono. Ora, l'intuizionista potenziale *può* comprendere la nozione ingenua di dimostrazione, poiché è in grado di dar senso alla nozione di fatto oggettivo: il fatto oggettivo che A è il fatto che la proposizione "A" è atemporalmente dimostrabile. Di conseguenza, egli può definire induttivamente le condizioni di verità di una proposizione composta in termini di fatti oggettivi concernenti la verità delle sue sottoproposizioni. Più precisamente, date condizioni di dimostrabilità per enunciati atomici ($\perp$), il *significato potenziale* delle costanti logiche può essere espresso nel modo seguente:

(1)$\perp$ non è vera;
(2)$A \wedge B$ è vera se sia A che B sono vere;
(3)$A \vee B$ è vera se A è vera o B è vera;
(4)$A \supset B$ è vera se è dimostrabile che B è vera qualora A sia vera;
(5)$\forall xA$ è vera se è dimostrabile che, per ogni individuo d, $A(d/x)$ è vera;
(6)$\exists$ xA è vera se, per qualche individuo d, $A(d/x)$ è vera.[2]

Si osservi che le costanti logiche che occorrono nel metalinguaggio sono interpretate *classicamente* nel mondo delle proposizioni. Di conseguenza, l'intuizionista potenziale è in grado di dare una spiegazione del significato potenziale delle costanti logiche che è realmente *riduttiva*, ed egli *non* cade nel regresso infinito menzionato sopra. Inoltre, le clausole appena date sono equivalenti, *per lui*, a quelle di Heyting nel senso che, se una proposizione A è vera in base all'interpretazione potenziale, esiste una dimostrazione di A in base alla spiegazione di Heyting. Per esempio, confrontiamo la clausola (4) data sopra con la versione di Heyting:

(4')Una dimostrazione di $A \supset B$ è un metodo per trasformare qualunque dimostrazione di A in una dimostrazione di B.

Supponiamo che $A \supset B$ sia vera in base a (4). Data una dimostrazione di A, facendo uso di una dimostrazione che B è vera qualora lo sia A arriviamo a sapere che B è dimostrabile, e questa stessa conoscenza deve essere l'esito di una dimostrazione di B (in quanto *sapere* che una proposizione è dimostrabile equivale ad averla dimostrata). Quindi una dimostrazione di $A \supset B$ fornisce un metodo per trasformare qualunque dimostrazione di A in una dimostrazione di B. Considerazioni analoghe si applicano alle altre clausole.

L'intuizionista ortodosso è in una posizione completamente diversa in quanto, a causa della sua concezione antirealista della matematica, egli *non può* capire la nozione ingenua di dimostrazione. La *raison d' tre* della revisione della logica classica da parte di Heyting non è semplicemente l'intento costruttivista di sottolineare il ruolo centrale della dimostrabilità nella verità matematica, ma anche la necessità di procedere a una riforma della stessa nozione di dimostrazione intuitiva. Il suo non credere in un regno oggettivo di fatti lo costringe ad abbandonare l'usuale concezione realista delle dimostrazioni e pone il problema di come concepire le dimostrazioni intuizioniste. In assenza di fatti oggettivi da dimostrare, che cosa dimostrano le dimostrazioni intuizioniste? La spiegazione del significato delle costanti logiche di Heyting è appunto un tentativo di rispondere a questa domanda. Definendo induttivamente che cos'è la dimostrazione di una proposizione composta in termini di che cosa è una dimostrazione di ciascuna delle sue componenti, Heyting cerca di superare la difficoltà di spiegare *che cosa è* una dimostrazione intuitiva di una proposizione senza dire *quali fatti* essa deve dimostrare.

Qualche volta questo aspetto della spiegazione di Heyting non è stato adeguatamente apprezzato nella letteratura. Consideriamo per esempio la clausola di Heyting per la quantificazione universale:

(5')Una dimostrazione di $\forall xA$ è un metodo per ottenere, per ogni individuo d, una dimostrazione di $A(d/x)$.

Alcuni commentatori hanno proposto di aggiungere una 'clausola aggiuntiva' che richiede una *dimostrazione* che il metodo in questione dà, per ogni individuo d, una dimostrazione di $A(d/x)$. In realtà, la necessità di tale dimostrazione è un'apparenza generata da un modo classico di pensare. In base a questo può accadere che un metodo produca, di fatto, una dimostrazione di $A(d/x)$ per tutti i d, anche se questa sua caratteristica non viene riconosciuta. Ne segue che una dimostrazione di $\forall xA$, oltre a fornire il metodo richiesto, deve anche mostrare che esso funziona nel modo desiderato. Per esempio, sia G la congettura di Goldbach che ogni numero pari >2 è la somma di due primi. Se G è vera c'è un metodo banale che soddisfa (5'): basta calcolare, per qualunque numero pari n >2, tutte le somme di coppie di numeri primi ^{2} n, fino a che si trova una coppia la cui somma è n. Naturalmente questo metodo non è esso stesso una dimostrazione di G: al fine di dimostrare G dobbiamo *mostrare* che, applicando il metodo a un qualunque numero pari, otterremo sempre la coppia desiderata. Ma per l'intuizionismo ortodosso non ci sono fatti indipendenti dalla conoscenza, per cui non c'è spazio per distinguere tra il semplice fatto che il metodo funziona e una dimostrazione di questo fatto. Quindi per l'intuizionista ortodosso la clausola aggiuntiva è completamente inutile: la sua introduzione non è che un tentativo fuorviante di caratterizzare una dimostrazione di "xA dicendo quali fatti essa deve dimostrare.

Naturalmente, siccome il metalinguaggio in cui le clausole di Heyting sono formulate deve essere interpretato intuizionisticamente, la sua spiegazione *non è* riduttiva, e cade nel regresso infinito menzionato sopra. Ciò che una dimostrazione intuizionista di una quantificazione universale realmente è, è qualcosa che rimane celato nella nozione intuizionista primitiva di metodo (generale).

Riassumendo, l'intuizionista potenziale non solo ha a portata di mano una nozione di dimostrazione più vicina all'uso ordinario, ma è anche in grado di *definire* il significato potenziale delle costanti logiche, superando con ciò una difficoltà essenziale connessa alla spiegazione di Heyting. Ma il prezzo da pagare (eventualmente senza rimpianti) per questi vantaggi è l'impossibilità di *criticare* la matematica classica.

L'intellegibilità delle costanti logiche classiche per l'intuizionista potenziale ha una conseguenza più radicale di quelle illustrate finora. Per metterla in luce confrontiamo l'intuizionismo potenziale con la *matematica epistemica*[3]. Dato un linguaggio del primo ordine L, sia L_e il linguaggio epistemico ottenuto aggiungendo l'operatore epistemico K con la regola di formazione: se A è una formula, allora KA è una formula. Leggeremo KA come "é (atemporalmente) conoscibile (o dimostrabile) che A". La *traduzione intuizionista* A* di una formula A di L è definita induttivamente nel modo seguente:

(7)
$A^* = KA$ per A atomica $\perp$
$\perp^* = \perp$
$(A\wedge B)^* = A^*\wedge B^*$
$(A\vee B)^* = A^*\vee B^*$
$(A\supset B)^* = K(A^*\supset B^*)$
$(\forall xA)^* = K(\forall xA^*)$
$(\exists xA)^* = \exists xA^*$.

é noto che una formula è derivabile nella logica intuizionista sse la sua traduzione intuizionista è derivabile nella logica epistemica (cfr. Shapiro (1985)). Ma qui siamo interessati a considerazioni di teoria del significato. Data un'interpretazione *classica* di L, estendiamola a L_e interpretando KA nel modo spiegato sopra. Con il nome di *significato epistemico* di un enunciato di L_e ci riferiremo a questa interpretazione.

Supponiamo adesso che l'interpretazione degli enunciati atomici sia intuizionisticamente accettabile (cioè che il significato di tali enunciati sia dato da condizioni di dimostrazione). Allora, come fa vedere l'argomentazione sviluppata nella sezione 1, l'intera interpretazione di L_e (nella quale le costanti logiche hanno i loro significati classici) è accessibile all'intuizionista potenziale. Inoltre, se A è una formula di L, il significato epistemico di A* è identico al significato intuizionista potenziale di A (come si mostra mediante una facile induzione sulla complessità di A). Quindi, entro il framework stesso dell'intuizionismo potenziale, il significato potenziale delle costanti logiche è definibile, con l'aiuto dell'operatore K, in termini del significato classico.

Possiamo concludere che l'interpretazione potenziale delle costanti logiche è priva di qualunque rilevanza logica. Non può essere proposta come base per una logica alternativa a quella classica. La logica classica è non solo intellegibile per l'intuizionista potenziale, ma anche perfettamente adatta a trattare la sua nozione di conoscibilità. Diversamente dall'ortodosso, l'intuizionista potenziale non ha alcun bisogno di effettuare una revisione della logica classica: per quanto concerne la logica, egli ragiona esattamente come il matematico classico. Inoltre, egli ha un'ottima ragione per usare la logica classica, e cioè il fatto che essa gli permette di dare una spiegazione autenticamente riduttiva del significato intuizionista delle costanti logiche. Ciò che caratterizza la sua posizione è il suo interesse per certe proposizioni che hanno a che fare con la nozione di conoscibilità, concepita realisticamente come conoscibilità di fatti oggettivi. Questa non è altro che la nozione ingenua di dimostrabilità intuitiva, condivisa dal matematico classico, la quale ha poco a che vedere con la sofisticata nozione di dimostrabilità dell'intuizionismo ortodosso. Più in generale, possiamo concludere che l'intuizionismo potenziale è una posizione realista il cui intento costruttivista non porta al rifiuto della logica classica ma a una matematica epistemica basata sulla logica classica e sulla nozione ingenua di dimostrabilità. Si tratta certamente di una posizione interessante come tentativo di conciliare, in qualche misura, la matematica classica con quella intuizionista; ma è altrettanto certo che la posizione filosofica dell'intuizionista potenziale è molto lontana dalla concezione della matematica di Brouwer e Heyting.

Note

1 Per certi aspetti, questa sembra la mossa implicita nella teoria dei tipi di Martin-Lof, in particolare nella sua distinzione tra proposizioni e giudizi. In base ad essa "A è potenzialmente vera" è un giudizio, e una caratteristica generale dei giudizi è che ad essi non possono venire applicate le operazioni logiche; di conseguenza un giudizio che esprima il contenuto di (TEP) non può esistere. Tuttavia, questa risposta può essere accettata soltanto da chi sottoscriva 1) la distinzione tra giudizi e proposizioni, e 2) la ragionevolezza del divieto di applicare la negazione a un giudizio. In Martino & Usberti (1991) abbiamo formulato alcune ragioni per *non* accettare né 1) né 2). Si osservi che se (TEP) fosse privo di senso per le ragioni in questione, lo stesso varrebbe per l'affermazione di Martin-Lof che "Se A è attualmente vera, allora è potenzialmente vera", perché anche in essa è violato il precetto di non applicabilità delle costanti logiche ai giudizi.

2 Un'interpretazione simile delle costanti logiche intuizioniste è stata proposta da Carlo Dalla Pozza in Dalla Pozza (1991).

3 Per una bella introduzione a questo argomento si veda Shapiro (1985).

Bibliografia

[1]Dalla Pozza, Carlo: 1991, 'Un'interpretazione pragmatica della logica proposizionale intuizionistica', in Usberti, G. (ed.), *Problemi fondazionali nella teoria del significato*, Leo S. Olschki Editore, Firenze, 49-75.

[2]Dummett, Michael A.E.: 1975, 'The philosophical basis of intuitionistic logic', in Rose, H.E. & Sheperdson, J.C. (eds.), *Logic Colloquium '73*, North Holland, Amsterdam, 5-40.

[3]Dummett, Michael A.E.: 1977, *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford.

[4]Dummett, Michael A.E.: 1987, 'Reply to Dag Prawitz', in Taylor, B. (ed.), *Michael Dummett: Contributions to Philosophy*, Nijhoff, The Hague, 281-286.

[5]Martin-Lof, Per: 1991, 'A path from logic to metaphysics', in Sambin, G. & Corsi, G. (eds.), *Atti del Congresso 'Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza', Viareggio, 8-13 gennaio 1990,* vol. II, CLUEB, Bologna, 141-149.

[6]Martino, Enrico e Usberti, Gabriele: 1991, 'Propositions and judgements in Martin-Lof', in Usberti, G. (ed.), *Problemi fondazionali nella teoria del significato*, Leo S. Olschki Editore, Firenze, 125-136.

[7]Prawitz, Dag: 1987, 'Dummett on a theory of meaning and its impact on logic', in Taylor, B. (ed.), *Michael Dummett: Contributions to Philosophy*, Nijhoff, The Hague, 117-165.
[8]Shapiro, Stewart: 1985, 'Epistemic and intuitionistic arithmetic', in Shapiro, S. (ed.), *Intensional Mathematics*, North Holland, Amsterdam, 11-46.